УДК 51(071)

Л.П. Мироненко
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58, mironenko.leon@yandex.ru, eagor0@mail.ru

Классификация канонических уравнений поверхностей второго порядка в пространстве R^4. Невырожденный случай

L.P. Mironenko
Donetsk National Technical University
Ukraine, 83001, c. Donetsk, Artema st., 58, mironenko.leon@yandex.ru, eagor0@mail.ru

Classification of the Equations of the Second Order Surfaces in Space R^4. Non-Degenerated case

Л.П. Мироненко
Донецький національний технічний університет, Україна
Україна, 83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58, mironenko.leon@yandex.ru, eagor0@mail.ru

Класифікація канонічних рівнянь поверхні другого порядку у просторі R^4. Невироджений випадок

В работе развит матричный метод классификации канонических уравнений поверхностей второго порядка в пространстве R^4. В основе метода лежит анализ симметричной матрицы пятого порядка, составленной из коэффициентов квадратичной формы четырех переменных. Из этой матрицы построены все мономиальные матрицы пятого порядка, их 25. Эти матрицы определяют 14 канонических уравнений поверхностей эллиптического, гиперболического и параболического типов.
Ключевые слова: канонический, поверхность, эллипсоид, гиперболоид, параболоид, пространство R^4, матрица, мономиальная матрица, каноническое уравнение.

In the paper, the matrix method for classification of the second order surfaces in space R^4 is developed. This method is based on the analysis of the 5-th order symmetrical quadratic matrix. The matrix is built with three coefficients of the quadratic form of four variables. Such matrix produces 25 monomial 5-th order matrices. These matrices give 14 simplest equations of elliptic, hyperbolic and parabolic types of surfaces.
Key words: canonical, surface, ellipsoid, hyperboloid, paraboloid, space R^4, matrix, monomial matrix, canonical equation.

У роботі розвинуто матричний метод класифікації поверхні другого порядку у просторі R^4. Метод ґрунтується на аналізі симетричної матриці п’ятого порядку, яка складається з коефіцієнтів квадратичної форми чотирьох змінних. Із цієї матриці побудовані всі можливі мономіальні матриці, їх рівно 25. Ці матриці дають 14 канонічних рівнянь поверхні еліптичного, гіперболічного і параболічного типів.
Ключові слова: канонічний вигляд, поверхня, еліпсоїд, гіперболоїд, параболоїд, простір R^4, матриця, мономіальна матриця, канонічне рівняння.

Введение

Наиболее адекватным методом классификации поверхностей второго порядка является подход, основанный на параллельном переносе и повороте осей декартовой системы координат, которые приводят квадратное уравнение общего вида (1) к одной из канонических форм. Этот аналитический подход реализуется с большим трудом,

поскольку преобразования квадратичной формы сопряжены с довольно сложными вычислениями перехода от одной системы координат к другой [1-3]. В случае пространства R^4 задача может быть решена в принципе, но практически осуществить это сложно.

В другом, менее трудоемком подходе, рассматриваются поверхности второго порядка как фигуры, полученные в результате вращения кривых второго порядка (эллипса, гиперболы, параболы) вокруг какой-либо координатной оси. После этого результаты обобщаются [4-6]. В случае пространства R^4 задача неразрешимая.

Еще одним из методов классификации является метод, основанный на инвариантах квадратичной формы (1) [7]. Инварианты не зависят от выбора осей системы координат. Этот метод не лишен недостатков, хотя бы потому, что трудно запомнить все инварианты, не говоря о том, как их получить.

В работе предлагается относительно простой способ получения канонических уравнений поверхностей второго порядка в пространстве R^4 и их классификации. Метод основан на идее параллельного переноса и поворота осей декартовой системы координат, но реализуется иным способом. Метод подробно изложен в работах [8], [9]. В работе [8] метод применяется к кривым второго порядка, а в работе [9] – к поверхностям в пространстве R^3. Основная идея классификации состоит в том, что из коэффициентов симметричной квадратичной формы – будь то двух, трех и более переменных – составляются все возможные мономиальные матрицы и последним ставятся в соответствие алгебраические уравнения, которые представляют собой канонические формы уравнений различных поверхностей.

1 Обоснование идеи метода классификации уравнений второго порядка поверхностей в R^4

Рассмотрим уравнение второй степени с неизвестными x, y, z, w

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}w^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xw + \\ &+ 2a_{23}yz + 2a_{24}yw + 2a_{34}zw + 2a_{15}x + 2a_{25}y + 2a_{35}z + 2a_{45}w + a_{55} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a_{11}, a_{12}, ..., a_{55}$ – коэффициенты уравнения, заданные действительные числа. В зависимости от соотношения между коэффициентами a_{ij}, уравнение (1) описывает ту или иную поверхность в пространстве R^4 в декартовой системе координат (включая возможные вырожденные случаи, скажем, когда уравнение (1) распадается на пару параллельных плоскостей или поверхность вырождается в точку и т.д.). Тип поверхности определяется не только соотношениями между коэффициентами, но также их знаками.

Расположение осей системы координат влияет на (внешний) вид уравнения. Если уравнение поверхности имеет наиболее простой вид в определенной системе координат, то говорят о его канонической форме.

Составим квадратную матрицу из коэффициентов квадратичной формы (1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

В задаче матрица A является симметричной $a_{ij} = a_{ji}$, поэтому у матрицы A различных только 15 элементов.

Ясно, что, при параллельном переносе декартовой системы координат $Oxyzw$ и помещении ее в «центр» поверхности, линейные члены формы (1) по переменным x, y, z и w обращаются в нуль (исключая некоторые вырожденные случаи). Это означает, что коэффициенты $a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45}$ матрицы (2) могут быть обращены в нуль. Учитывая симметричный характер матрицы A, можно преобразованную матрицу A' представить в виде $A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & 0 \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_{55} \end{pmatrix}$. Теперь поворотом системы координат $O'x'y'z'w'$ в «центре» поверхности в шести плоскостях, образуемых четырьмя осями x', y', z', w', можно добиться того, чтобы «смешанные» квадратичные члены $2a_{12}xy, 2a_{13}xz, \quad 2a_{14}xw, 2a_{23}yz, 2a_{24}yw, 2a_{34}zw$ обратились в нуль. В результате матрица A' примет диагональный вид $A'' = \begin{pmatrix} a''_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a''_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a''_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a''_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a''_{55} \end{pmatrix}$. Заметим, что по внешнему виду данная матрица относится к так называемым мономиальным матрицам. Преобразование матрицы A к виду A'' подсказывает возможность привести матрицу A к другому виду, в котором из 15 элементов исходной матрицы (2) останется только 5 (параллельный перенос вдоль осей координат дает четыре «нулевых» элемента и повороты – еще шесть «нулевых» элементов, всего можно обратить в нуль 10 коэффициентов a_{ij}). Эти рассуждения приводят к матричному методу классификации возможных канонических форм уравнений поверхностей второго порядка.

В теории матриц определяются матрицы специального вида – **мономиальные** матрицы. Это квадратные матрицы, у которых в каждой строке и каждом столбце находится только один, отличный от нуля, элемент. Простейшим примером мономиальной матрицы являются единичная матрица.

Главным в методе является построение всех возможных мономиальных матриц из исходной матрицы A. Таких матриц оказывается 25 (в пространстве R^3 их 10). Из этих матриц оставляют только топологически не эквивалентные матрицы. Под топологически эквивалентными матрицами подразумеваются матрицы, которые приводят качественно к одинаковым уравнениям. Другими словами, уравнения отличаются только расположениями в них переменных x, y, z, w. Перемена местами неизвестных x, y, z, w в уравнении не изменяет решений уравнения. Как будет показано, таких матриц только пять (пять групп уравнений в табл. 1). Эти матрицы, в зависимости от знаков их элементов, дают канонические уравнения поверхностей второго порядка, образуя эллиптическую, гиперболическую и параболическую группы поверхностей.

2 Построение мономиальных матриц в пространстве R^4 и классификация поверхностей

Рассмотрим первый случай мономиальной матрицы, когда матрица (2) диагональная. Обозначим ее A_1 и считаем отличными от нуля элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}$ матрицы A_1. Подставим коэффициенты в уравнение (1), получим уравнение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}w^2 + a_{55} = 0.$$

Различные варианты знаков коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}$ матрицы A_1 приводят к следующим каноническим уравнениям поверхностей:

[1] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{w^2}{d^2} = 1$ – уравнение 4-мерного эллипсоида.

[2]* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{w^2}{d^2} = 1$ – однополостный 4-мерный гиперболоид.

[3]* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{w^2}{d^2} = 1$ – двуполостный 4-мерный гиперболоид.

[4]* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{w^2}{d^2} = 1$ – аналога в пространстве R^3 нет.

[5] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{w^2}{d^2} = -1$ – мнимый 4-мерный эллипсоид.

Замечание. Звездочками отмечены поверхности, аналогов которых нет в пространстве R^3.

Рассмотрим следующую группу мономиальных матриц $A_2 - A_5$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матрицы (3) имеют общие черты и приводят к качественно одинаковым уравнениям:

$$\begin{matrix} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{45}w = 0, & a_{11}x^2 + a_{33}z^2 + a_{44}w^2 + 2a_{25}y = 0, \\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{44}w^2 + 2a_{35}z = 0, & .a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}w^2 + 2a_{15}x = 0. \end{matrix} \quad (4)$$

Матрицы, которые приводят качественно к одинаковым уравнениям, будем называть топологически эквивалентными. Следовательно, матрицы (3) $A_2 - A_5$ топологи-

чески эквивалентные, поэтому достаточно рассмотреть одно из уравнений (4), например, первое. Комбинируя знаки коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{45}$ матрицы A_2, получим следующие три уравнения:

[6] $w = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ – 4-мерный эллиптический параболоид.

[7]* $w = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ – 4-мерный гиперболический параболоид.

[8]* $w = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ – также 4-мерный гиперболический параболоид.

Рассмотрим следующую группу из шести мономиальных матриц $A_6 - A_{11}$. Эти матрицы образуются с помощью шести «смешанных» членов квадратичной формы (1) $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}$. Поскольку матрицы топологически эквивалентные, запишем только первые две из них:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix}, \; A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix} \text{ и т.д.} \quad (5)$$

Топологически эквивалентные матрицы (5) $A_6 - A_{11}$ приводят к шести уравнениям:

$$\begin{aligned} &a_{12}xy + a_{33}z^2 + a_{44}w^2 + a_{55} = 0, \;\; a_{23}yz + a_{11}x^2 + a_{44}w^2 + a_{55} = 0, \\ &a_{13}xz + a_{22}y^2 + a_{44}w^2 + a_{55} = 0, \;\; a_{24}yw + a_{33}z^2 + a_{11}x^2 + a_{55} = 0, \\ &a_{14}xw + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{55} = 0, \;\; a_{34}zw + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{55} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Достаточно рассмотреть одно из уравнений (6), например, первое. Комбинация знаков коэффициентов $a_{12}, a_{33}, a_{44}, a_{55}$ матрицы A_6 приводит к следующим уравнениям:

[9]** $\frac{xy}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{w^2}{d^2} = 1$ – частный случай поверхности [2]*.

[10] ** $\frac{xy}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{w^2}{d^2} = 1$ – частный случай поверхности [4]*.

[11] ** $\frac{xy}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{w^2}{d^2} = 1$ – частный случай поверхности [3]*.

Эти канонические уравнения не приводят к новым поверхностям. Покажем это, применив, например, к первому уравнению группы (6) формулы поворота в плоскости xOy на $\pi/4$: $x = x'\cos\frac{\pi}{4} + y'\sin\frac{\pi}{4}$, $y = -x'\sin\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4}$, откуда

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \;\; y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y').$$

Подставим эти выражения для x и y в уравнение [9], получим

$$\frac{y'^2 - x'^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{w^2}{d^2} = 1.$$

Это частный случай уравнения [2] при $a=b$ – 4-мерный гиперболоид. Аналогично убеждаемся в том, что остальные поверхности [10] – [11] являются частными случаями гиперболоидов [3]* – [4]*.

Замечание. Двумя звездочками отмечены поверхности, которые поворотом осей системы координат приводятся к уже полученным ранее поверхностям.

Рассмотрим следующие 12 мономиальных матриц $A_{12}-A_{23}$:

$$A_{12}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_{13}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & 0 \end{pmatrix} A_{14}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{35} & 0 & 0 \\ 0 & a_{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & 0 \end{pmatrix}$$

и т.д.

Эти матрицы топологически эквивалентные и приводят к уравнениям:

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2+2a_{34}zw+2a_{25}y=0, \quad a_{22}y^2+2a_{14}xw+a_{35}z=0, \quad a_{33}z^2+2a_{114}xw+2a_{25}y=0, \\ &a_{11}x^2+2a_{23}yz+2a_{45}w=0, \quad a_{22}y^2+2a_{13}zx+a_{45}w=0, \quad a_{44}w^2+2a_{23}yz+a_{15}x=0, \\ &a_{11}x^2+2a_{24}yw+2a_{35}z=0, \quad a_{33}z^2+2a_{24}yw+2a_{15}x=0, \quad a_{44}w^2+2a_{13}xz+a_{25}y=0, \\ &a_{22}y^2+2a_{24}yw+a_{15}x=0, \quad a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{45}w=0, \quad a_{44}w^2+2a_{12}xy+a_{35}z=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим одно из уравнений (7), например, второе. Комбинация знаков элементов a_{11},a_{23},a_{45} приводит к уравнениям:

[12]** $w=\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{yz}{b^2}$ – частный случай поверхности [8]*.

[13]** $w=-\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{yz}{b^2}$ – частный случай поверхности [7]*.

Так же, как в предыдущем случае, поворотом осей системы координат в плоскости yOz уравнения переходят в уже известные случаи параболоидов [7]* – [8]*.

Рассмотрим оставшиеся мономиальные матрицы $A_{23}-A_{25}$:

$$A_{23}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix}, A_{24}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix}, A_{25}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Этим матрицам соответствуют уравнения:

$$\begin{aligned} 2a_{12}xy+2a_{34}zw+a_{55}&=0, \\ 2a_{13}xz+2a_{24}yw+a_{55}&=0, \\ 2a_{14}xw+2a_{23}yz+a_{55}&=0. \end{aligned}$$

Рассмотрим только первое уравнение. Комбинации знаков элементов a_{12},a_{34},a_{55} приводят к одному новому уравнению:

[14]** $\frac{xy}{a^2}+\frac{zw}{b^2}=1$ – частный случай поверхности [4]*.

Сведем результаты в таблицу.

Таблица 1 – Классификация поверхностей второго порядка с помощью мономиальных топологически не эквивалентных матриц

	Мономиальные невырожденные матрицы	Геометрические образы
1	A_1	[1] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{w^2}{d^2}=1$ – 4-мерный эллипсоид. [2]* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{w^2}{d^2}=1$ – однополостный 4-мерный гиперболоид. [3]* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{w^2}{d^2}=1$ – двуполостный гиперболоид. [4]* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{w^2}{d^2}=1$ – аналога в пространстве R^3 нет. [5] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{w^2}{d^2}=-1$ – мнимый 4-мерный эллипсоид.
2	$A_2 - A_5$	[6] $w=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ – 4-мерный эллиптический параболоид. [7]* $w=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$ – 4-мерный гиперболический параболоид. [8]* $w=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$ – также 4-мерный гиперболический параболоид.
3	$A_6 - A_{11}$	[9]** $\frac{xy}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{w^2}{d^2}=1$ – частный случай поверхности [2]*. [10] ** $\frac{xy}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{w^2}{d^2}=1$ – частный случай поверхности [4]*. [11] ** $\frac{xy}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{w^2}{d^2}=1$ – частный случай поверхности [3]*.
4	$A_{12} - A_{22}$	[12]** $w=\frac{x^2}{c^2}+\frac{yz}{b^2}$ – частный случай поверхности [8]*. [13]** $w=-\frac{x^2}{c^2}+\frac{yz}{b^2}$ – частный случай поверхности [7]*.
5	$A_{23} - A_{25}$	[14]** $\frac{xy}{a^2}+\frac{zw}{b^2}=1$ – частный случай поверхности [4]*.

Заключение

В работе предложен новый метод классификации канонических уравнений поверхностей второго порядка в пространстве R^4, который был разработан в работах [8], [9] для пространств R^2 и R^3. В основе метода лежит анализ симметричной матрицы пятого порядка, составленной из коэффициентов

квадратичной формы второго порядка четырех переменных. Из этой матрицы построены все возможные мономиальные матрицы пятого порядка, исключая вырожденные случаи. Невырожденных мономиальных матриц 25, но из них топологически различных только 5. Топологически различные невырожденные матрицы, в зависимости от знаков элементов матрицы, классифицируют основные виды поверхностей, образуя эллиптическую, гиперболическую и параболическую группы поверхностей. Всего возможны 14 канонических форм уравнений поверхностей и только различных 8. Особенностью подхода являются канонические уравнения, которые отсутствуют в классических методах классификации. Речь идет об уравнениях поверхностей [9] – [14]. Кроме того, в пространстве R^4 появляются новые поверхности [2] – [4], [7], аналогов которых нет в пространстве R^3.

Отметим основные достоинства матричного метода классификации:

1. Воспроизводит все известные виды поверхностей второго порядка.
2. Дополняет общепринятую классификацию новыми видами канонических уравнений поверхностей.
3. Автоматически дает различные канонические формы уравнения для одной и той же поверхности при различных расположениях осей системы координат.
4. Простой в обращении и не требует сложных расчетов, в отличие от обычных методов.
5. Использует простую терминологию теории матриц (и не требует сложных математических понятий, таких, как инварианты преобразования, семиинварианты и другие).
6. С одинаковым успехом применяется в пространствах различной размерности, в принципе, произвольной размерности.

Литература

1. Кадомцев С.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Кадомцев С.В. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 160 с.
2. Ильин В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М. : Наука, 1999. – 296 с.
3. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Ефимов Н.В. – М. : Наука, 1969. – 272 с.
4. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Александров П.С. – М. : Наука, 1979. – 512 с.
5. Делоне В.И. Аналитическая геометрия. Т. 1 / В.И. Делоне, Д.А. Райков. – М. : Гостехиздат, 1949. – 592 с.
6. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. Vol. 1 / Apostol T.M. – John Wilay and Sons, Inc., 1966. – 667 p.
7. Моденов П.С. Аналитическая геометрия / Моденов П.С. – Москва : Изд. Московского университета, 1966. – 698 с.
8. Мироненко Л.П. Матричный метод классификации кривых второго порядка / Л.П. Мироненко, И.В. Петренко // Искусственный интеллект. – 2011. – № 4. – С. 335-342.
9. Мироненко Л.П. Матричный метод классификации поверхностей второго порядка / Л.П. Мироненко, И.В. Петренко // Искусственный интеллект. – 2011. – № 4. – С. 65-72.

Literatura

1. Kadomtsev S.V. Lineynaya algebra I analiticheskaya geometriya. M.: FIZMATLIT. 2003. 160 s.
2. Iliyn V.A. Lineynaya algebra. M.: Nauka. 1999. 296 s.
3. Efimov N.V. Kratkiy kurs analiticheskoj geometrii. M.: Nauka. 1972. 272 s.
4. Aleksandrov P.S. Kurs analiticheskoj geometrii i lineynoj algebry. M.: Nauka. 1979. 512 s.
5. Delone V.I. Analiticheskaya geometriya. Tom 1. Gostekhizdat. 1949. 592 s.
6. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. Vol 1. John Wilay and Sons. Inc. 1966. 667 s.
7. Modenov P.S. Analiticheskaya geometriya Moskva. Izd. Moskovsky Universitet. 1966. 698 s.
8. Mironenko L.P. Iskusstvennyj intellect. 2011. № 4. S. 335-342.
9. Mironenko L.P. Iskusstvennyj intellect. 2011. № 4. S. 65-72.

L.P. Mironenko

Classification of the Equations of the Second Order Surfaces in Space R^4. Non-Degenerated case

In the paper, the matrix method for classification of the second order surfaces in space R^4 is developed. This method is based on the analysis of the 5-th order symmetrical quadratic matrix. The matrix is built with three coefficients of the quadratic form of four variables. Such matrix produces 25 monomial 5-th order matrices. These matrices give 14 simplest equations of elliptic, hyperbolic and parabolic types of surfaces.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

The matrix A is a symmetric matrix of the coefficients a_{ij} of the quadratic equation

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}w^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xw + +2a_{24}yw + 2a_{34}zw + 2a_{15}x + 2a_{25}y + 2a_{35}z + 2a_{45}w + a_{55} = 0.$

The main results of the work are represented in the next table.

	Monomial non-degenerated matrixes	Geometrical images
1	A_1	[1] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{w^2}{d^2}=1$ A 4-dimensional ellipsoid. [2] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{w^2}{d^2}=1$ One cavity 4-dimensional hyperboloid. [3] $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{w^2}{d^2}=1$ A two cavity hyperboloid. [4] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{w^2}{d^2}=1$ There is no an analogy in the space R^3. [5] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{w^2}{d^2}=-1$ An imagine 4-dimensional ellipsoid.
2	$A_2 - A_5$	[6] $w=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ A 4-dimensional elliptical paraboloid. [7] $w=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$ A 4-dimensional hyperbolic paraboloid. [8] $w=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$ Also a 4-dimensional hyperbolic paraboloid.
3	$A_6 - A_{11}$	[9] $\frac{xy}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{w^2}{d^2}=1$ A case of [2]. The surface is rotated at $\pi/4$. [10] $\frac{xy}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{w^2}{d^2}=1$ A case of [4]. The surface is rotated at $\pi/4$. [11] $\frac{xy}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{w^2}{d^2}=1$ A case of [3]. The surface is rotated at $\pi/4$.
4	$A_{12} - A_{22}$	[1* $w=\frac{x^2}{c^2}+\frac{yz}{b^2}$ A case of [8]. The surface is rotated at $\pi/4$. [13] $w=-\frac{x^2}{c^2}-\frac{yz}{b^2}$ A case of [7]. The surface is rotated at $\pi/4$.
5	$A_{23} - A_{25}$	[14] $\frac{xy}{a^2}+\frac{zw}{c^2}=1$ A case of [4] at $a=b, c=d$. The surface is rotated at $\pi/4$.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.